

42 歐幾里德的算計…輾轉相除法

話說兩千多年前的歐幾里德，寫出第一本數學暢銷書《幾何原本》，不僅遠在東方的康熙皇帝讚譽有加，就連西方的林肯總統也經常熬夜苦讀。在《簡短的自傳》裡，有過如下對林肯讀幾何原本的描述：「自從他當了議會議員之後，他學習並掌握了歐幾里德的六卷書。他開始專心致志地進行嚴格的腦力訓練，以提高他的才能，特別是他的邏輯和語文能力。由此他喜歡歐幾里德的書，他在巡行時總帶著它們，經常在枕邊放一小蠟燭，學習到深夜，直到他能容易地證明六卷書中的所有命題。而與此同時，一間屋子裡有半打他的律師伙伴們，沒完沒了的鼾聲充斥房間。」

據說，歐幾里德會善用《幾何原本》裡的知識娛樂他的學生。他又叫兩位學生上台，輪流在黑板上寫出新的正整數的數字比賽：歐幾里德先在黑板上寫出 52 及 78 兩個數字，之後叫台上的男女學生，依下列規則，輪流在黑板上寫上正整數：

- (1) 所寫的數字必須是正整數，而且是黑板上某兩個數字的差。
- (2) 寫過的數字不能再寫。
- (3) 無法依規則寫出數字的一方輸。

這遊戲肯定不會平手，而且在有限回合後，就可以分出勝負。歐幾里德為了招收女弟子，讓更多的女生學會數學，經常巧妙的安排數字，讓女學生可以贏過男學生，就讓我們來玩這道遊戲在電腦上的 Flash 動畫版：

下圖是 1 到 100 的百數圖，甲、乙兩人輪流在百數圖上點選數字，規則如下：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- (1) 起先甲、乙兩人各選一個數字，選到的數字會呈灰色狀。
- (2) 接下來甲、乙兩人輪流點數字，點過的數字變成灰色，且每次新點的數字必須是前面點過某兩數的差。
- (3) 無法依規則點數字的一方輸。

以上圖為例，當甲、乙選的數字為 52 與 78 時，接下來是甲點數字，因為甲必須點這兩個灰色數字之差，即甲只能點數字 $78 - 52 = 26$ ，此時灰色數字變成三個，如下圖所示：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

然後輪到乙點數字，這時灰色數字有 52, 78 及 26 三個，所以乙可以點的數字有 $52 - 26 = 26$, $78 - 26 = 52$ 及 $78 - 52 = 26$ 三個，但這三個數都是灰色數字（已被點過），所以乙無法依規則點新數字，甲贏得比賽。

關於這道點選數字的遊戲，如何判別何者可以贏？贏的策略為何？

在進入遊戲解答之前，讓我們瞭解一個物理學上很有名的實驗——密立根油滴實驗，這實驗是透過測量不同微小油滴的帶電量來求得基本電荷量（一個電子所帶的電量）。實驗發現，將不同小油滴所量得的電荷除以 0.8×10^{-19} ，得到

$$2, 6, 14, 18, 46, \dots$$

等的整數。從這樣的數據可以推出基本電荷量是多少嗎？當然可以，因為每滴油滴是基本電荷量的倍數，所以這些小油滴所帶電荷量的最大公因數可以視為基本電荷量。從上述數據可以知道基本電荷量為 $2 \times 0.8 \times 10^{-19} = 1.6 \times 10^{-19}$ 。雖然只是最大公因數概念的簡單應用，但是卻讓密立根大大出名。同樣的情境，如果有五位美國學生到台灣觀光，他們在機場拿美金換台幣，分別換得

$$4725, 5670, 6930, 8064, 7087.5$$

元新台幣，那麼可以得知美金換台幣的匯率嗎？將這五個數除以 0.5，得

$$9450, 11340, 13860, 16128, 14175.$$

又這五個數的最大公因數為 63，所以可以推敲美金換台幣的匯率為

$$0.5 \times 63 = 31.5,$$

即一塊美金應該換 31.5 塊台幣。

這個推敲的前提當然是：五位學生都拿整數的美金換台幣。最大公因數並不只是數學的名詞，他是日常生活中經常可用到，而且存在的一道觀念與現象。現在就讓我們回到遊戲本身。

在點選百數圖的遊戲中，如果甲、乙兩人所點選的數字為 m 與 n ，其中 $m > n$ ，那麼在點選比賽過程中，會有如下的疑問：

- (1) 百數圖上被點選的最大數字為何？
- (2) 百數圖上被點選的最小數字為何？
- (3) 哪些數字會被點選？
- (4) 誰會贏得比賽，需要策略才會贏嗎？

現在就讓我們逐一的回答這些疑問。找個伙伴玩個幾次，將不難發現：這是道與歐幾里德輾轉相除法相關的遊戲。

- (1) 因為新點選的數字是已選數字的差，所以這些新點選的數字，都不會超過 m （甲、乙所選較大的數字）。故百數圖上被點選的最大數字為 m 。
- (2) 令 $d = (m, n)$ ，即 d 是 m 與 n 的最大公因數。由 $d | m$ 且 $d | n$ ，得新點選的數字都是 d 的倍數。又根據歐幾里德輾轉相除法， d 是由 m 與 n 輾轉相減得到的，所以 d 會出現在點選的數字上。因此，百數圖上被點選的最小數字為 m 與 n 的最大公因數 d 。
- (3) 不超過 m ，且是 $d = (m, n)$ 的倍數的正整數，即

$$d, 2d, 3d, \dots, m$$

都會被點選到。因為 m, d 都出現在黑板上，所以

$$m - d, m - 2d = (m - d) - d, m - 3d = (m - 2d) - d, \dots, d$$

會被點選到。

- (4) 被點選到的數字一共有

$$\frac{m}{(m, n)}$$

個，扣除甲、乙早已點選的 m, n 兩個數字，新點選的數字有

$$\frac{m}{(m, n)} - 2$$

個。

- ① 當 $\frac{m}{(m, n)} - 2$ （或者 $\frac{m}{(m, n)}$ ）是偶數時，後玩的乙會贏。不需要什麼策略，只需認真檢查即可。
- ② 當 $\frac{m}{(m, n)} - 2$ （或者 $\frac{m}{(m, n)}$ ）是奇數時，先玩的甲會贏。同樣不需要什麼策略，只需認真檢查即可。

有了上述分析，遊戲的輸贏在於判斷

$$D = \frac{\text{點選兩數的最大數}}{\text{點選兩數的最大公因數}}$$

是奇數還是偶數。當 D 是偶數時，乙贏；當 D 是奇數時，甲贏。有了這道規律，歐幾里

德可以輕易的讓女學生贏得比賽，不是嗎？